Ein Zusammenhang zwischen Filterparametern beim Tow-Thomas-Biquad

In diesem Artikel wird ein Zusammenhang zwischen verschiedenen Filterparametern des oft eingesetzten Tow-Thomas-Biquad hergeleitet, mit dem Ziel, notwendige Kompromisse zwischen den Filterparametern deutlich zu machen. Hierbei interessieren vor allem Filter bei höheren Frequenzen und/oder hohen Güten.

Der Biquad sei als Bandpass konfiguriert nach dem folgenden Signalfluss.

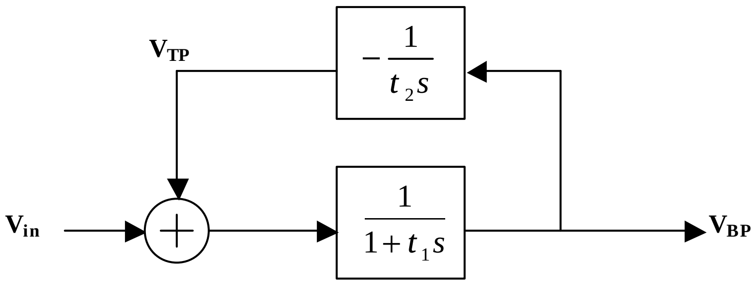

Abb. 1

Das Filter besitzt also die Übertragungsfunktion

$$\frac{V_{BP}}{V_{in}} = H(s) \quad = \quad \frac{t_2 s}{1 + t_2 s + t_1 t_2 s^2}$$

$$= \quad \frac{\dfrac{s}{w_m Q}}{1 + \dfrac{s}{w_m Q} + \dfrac{s^2}{w_m^2}}$$

Mit der Mittenkreisfrequenz ?$_m$ und der Güte Q bzw. der Bandbreite B= f_m/Q sowie der Grundverstärkung A_o =1. Nun denke man sich in den Feedbackpfad n Pole bei ? $_{pn}$ eingesetzt, die die Frequenzgänge der verwendeten Operationsverstärker repräsentieren sollen. Prinzipiell müssten die Pole auf Vorwärts- und Rückkopplungspfad verteilt eingesetzt werden. Pole im Vorwärtspfad werden dann zu Polen der Gesamtübertragungsfunktion.
Wenn aber Polkreisfrequenzen um Größenordnungen über der Mittenkreisfrequenz ? $_m$ liegen, beeinflussen Pole *ausserhalb* der Rückkopplungsschleife den Frequenzgang des Filters in der Praxis nur unwesentlich.

Bei Frequenzen weit unterhalb der Bandbreite der verwendeten Operationsverstärker kann man in erster Näherung alle Pole durch einen dominanten Pol ersetzen:

$$\frac{1}{1+j\Omega/\Omega_{p1}} \cdots \frac{1}{1+j\Omega/\Omega_{pn}}$$

$$\approx \frac{1}{1+j\Omega(\frac{1}{\Omega_{p1}}+\ldots+\frac{1}{\Omega_{pn}})} = \frac{1}{1+j\Omega/\Omega_p}$$

Mit der normierten Kreisfrequenz $\Omega = w/w_m$ und den normierten Polkreisfrequenzen $\Omega_{p1},...,\Omega_{pn}$ sowie der normierten "Ersatzpolkreisfrequenz" Ω_p.
Die Gesamtübertragungsfunktion bezogen auf $j\Omega$ und lautet dann

$$\hat{H}(j\Omega) = \frac{j\Omega/Q}{\frac{1}{1+j\Omega/\Omega_p} + j\Omega/Q - \Omega^2}$$

und da für $\Omega_p >> \Omega$: $\frac{1}{1+j\Omega/\Omega_p} \approx 1 - j\Omega/\Omega_p$ folgt näherungsweise

$$\hat{H}(j\Omega) = \frac{j\Omega/Q}{1+j\Omega(\frac{1}{Q}-\frac{1}{\Omega_p})-\Omega^2}$$

$$= \hat{A}_0 \frac{j\Omega/\hat{Q}}{1+j\Omega/\hat{Q}-\Omega^2}$$

wobei $\frac{1}{\hat{Q}} = \frac{1}{Q} - \frac{1}{\Omega_p}$, also

$$\boxed{\frac{\hat{Q}}{Q} = \frac{1}{1-Q\frac{w_m}{w_p}}}$$ "Gütenüberhöhung"

und

$$\boxed{\hat{A}_0 = A_0 \frac{\hat{Q}}{Q}}$$ "Amplitudenüberhö hung"

Die Übertragungsfunktion des Filters mit zusätzlichen Polen in der Rückkopplung ist also unter den gegebenen Voraussetzungen näherungsweise wieder eine Bandpassfunktion zweiten Grades mit derselben Mittenfrequenz, allerdings mit einer höheren Güte und einer höheren Grundverstärkung. (Eine genauere Analyse zeigt auch eine Verschiebung der Mittenfrequenz)

Der Tow-Thomas-Biquad besteht i.a. aus drei Operationsverstärkern. Wenn wir für alle Operationsverstärker einen Frequenzgang

$$H_{Amp}(jw) = \frac{A_{Amp}}{1 + \frac{jw}{w_{Amp}}}$$

zugrunde legen, gilt etwa

$$w_p \approx \frac{w_{Amp}}{3}$$

Fordern wir eine Abweichung der Grundverstärkung von eins um höchstens 1dB, bzw. eine Toleranz der Güte von max. ca. 10%, so muss gelten

$$\frac{1}{1 - Q\frac{3w_m}{w_{Amp}}} \leq 1{,}12$$

was für die Grenzfrequenz der Operationsverstärker auf die Forderung

$$\boxed{f_{Amp} \geq 30 \cdot Q \cdot f_m}$$

führt. (f_m ist Mittenfrequenz des Bandpasses)

Für eine zu fordernde maximale relative Abweichung der Grundverstärkung von
$\frac{\hat{A}_0}{A_0} \leq 1 + d$ ist:

$$\boxed{f_{Amp} \geq 3 \cdot (1 + \frac{1}{d}) \cdot Q \cdot f_m}$$

Für sehr kleine δ muss allerdings die Verringerung der Grundverstärkung durch Pole im Vorwärtszweig des Bandpassfilters berücksichtigt werden.
Man erkennt, wie die Bandbreite der Verstärker mit der Güte zunehmen muss, damit die Genauigkeit des Filters erhalten bleibt.

Nun wollen wir noch die Dynamik mit in die Betrachtung einbinden. Aus Abb. 1 entnimmt man, dass V_{TP} / V_{in} eine Tiefpassübertragungsfunktion mit w_m, Q darstellt. Für deren maximale Überhöhung gilt

$$\max \frac{|V_{TP}|}{|V_{in}|} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \approx Q$$

für höhere Güten $Q \geq 2$.

Da die Ausgangsspannung der Operationsverstärker die Dynamik nach oben begrenzt und an V_{TP} die höchste Spannung (od. d. höchste Strom, je nach Realisierung) der Schaltung anliegen wird, ist es sinnvoll, ein Größe D, welche vom Namen her an die Dynamik erinnern soll, durch

$$D := \min_f \frac{|V_{in}|}{|V_{\max}|}$$

zu definieren. $|V_{\max}|$ ist dabei die minimale Aussteuergrenze der verwendeten Verstärker. Die Größe D gibt offenbar keine Auskunft über die untere Grenze des Dynamikbereiches, da sie Rauschen nicht berücksichtigt. Sie gibt dagegen direkt an, wie gut der Ansteuer- oder Aussteuerbereich der verwendeten Verstärker ausgenutzt werden kann. Es muss über alle Frequenzen mindestens gelten (Rail-to-Rail Betrieb):

$$V_{in} \leq D \cdot V_B / \sqrt{2}$$

wobei V_{in} der Effektivwert eines Sinus am Eingang ist und V_B das Minimum von positiver und negativer Betriebsspannung.

Man erhält damit allgemein eine zweite Bedingung

$$\boxed{Q \cdot D \leq const}$$

die Dynamik im Sinne von Aussteuerbarkeit und Güte miteinander verknüpft. Die Konstante hängt, wie in einem Beispiel gleich deutlich werden wird, von der jeweiligen Schaltung ab.

Betrachten wir nun noch eine schaltungstechnische Realisierung eines Tow-Thomas-Bandpasses :

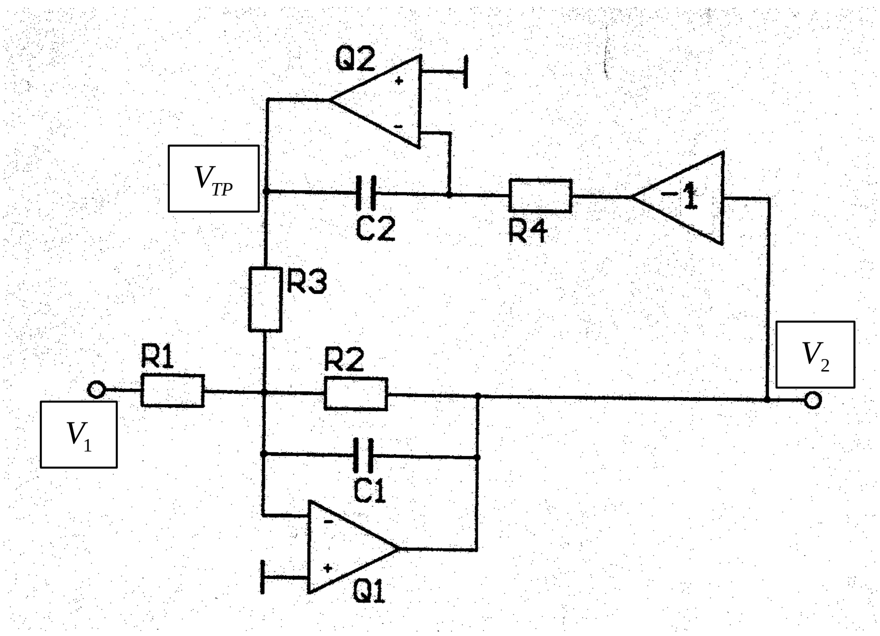

Abb. 2

Für die Übertragungsfunktion der Schaltung findet man

$$V_2 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{jwC_2R_3R_4 / R_2}{1 + jwC_2R_3R_4 / R_2 - w^2C_1C_2R_3R_4} \cdot V_{in}$$

und für die Spannung des in der Schaltung enthaltenen Tiefpasses

$$V_{TP} = -\frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + jwC_2R_3R_4 / R_2 - w^2C_1C_2R_3R_4} \cdot V_{in}$$

In dieser Schaltung ist also die Grundverstärkung $A_0 = -R_2 / R_1$ und

$$\max \frac{|V_{TP}|}{|V_{in}|} \approx \frac{R_3}{R_1} Q .$$

(Für höhere Güten, d.h. etwa Q≥2)

Folglich wird hier sinnvollerweise $D := \frac{1}{Q} . \frac{R_1}{R_3}$ definiert.

Der gedämpfte Integrator arbeitet jetzt aber gleichzeitig als DC-Verstärker mit dem Rückkopplungsfaktor:

$$k = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1 \parallel R_3}}$$

Die Bandbreite des Verstärkers im Vorwärtspfad des Filters müsste deshalb für Verstärkungen >>1 zusätzlich um den Faktor 1/k angehoben werden, um die Phasennacheilung nicht weiter zu verschlechtern. Dies gilt zumindest für spannungsrückgekoppelte Verstärker. Aber auch mit stromgegengekoppelten Verstärkern ist i.a. wenig Gewinn zu erzielen, da wegen der Kapazität am invertierenden Eingang des Operationsverstärkers ein ohmscher Widerstand zwischen dem Knotenpunkt R_1, R_3, R_2, C_1 und dem Eingang des Verstärkers geschaltet werden muss – der die Bandbreite wieder von k bzw. R_1 und R_3 abhängig machen wird.

Nun folgt weiter mit $-\frac{R_2}{R_1} = A_0$ als Grundverstärkung in dieser Realisierung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{R_2}{R_1 \parallel R_3} \\ &= 1 + \frac{R_2}{R_1}(1 + \frac{R_1}{R_3}) \\ &= 1 + |A_0| \cdot (1 + D \cdot Q) \end{aligned}$$

Eingesetzt in die vorher gefundene Forderung an die Bandbreite des Operationsverstärkers erhält man

$$f_{Amp} \geq 3 \cdot (1 + \frac{1}{d}) \cdot \left[1 + |A_0| (1 + Q \cdot D)\right] \cdot Q \cdot f_m$$

bzw. für $Q \cdot D = \frac{R_1}{R_3} >> 1, \quad d << 1,$ die Näherung:

$$\boxed{f_{Amp,\text{int}} \geq 3 \cdot \frac{1}{d} \cdot |A_0| \cdot D \cdot Q^2 \cdot f_m}$$

als Forderung an die Bandbreite des im gedämpften Integrator benutzten Operationsverstärkers.
Da man sich nach so und so vielen Vereinfachungen schon etwas von den wahren Verhältnissen entfernt hat, sollte auf jeden Fall nach den ersten Rechnungen und Abschätzungen von Hand eine Simulation durchgeführt werden um die Schaltung zu verifizieren.

Fazit:
Man erkennt, welche Kompromisse zwischen Mittenfrequenz, Güte, Genauigkeit, Grundverstärkung und Bandbreite zu treffen sind. In der Praxis bestätigt sich dann auch sehr rasch, was die Formel befürchten läßt: Für hohe Güten *und* Mittenfrequenzen ist der Tow-Thomas-Biquad unter Umständen nicht mehr die geeignete Schaltung, um einen qualitativ hochwertigen aktiven Bandpass zu realisieren. Dies gilt insbesondere für den Einsatz als Filterblock in einem größeren Gesamtfilter.
Ähnliche Ergebnisse erhält man übrigens auch für andere Resonatoren, z.B. das Sallen-Key-Filter.